

Министерство образования Пензенской области  
Муниципальное общеобразовательное учреждение  
основная общеобразовательная школа с. Крутец.

---

Областная научно – практическая конференция « Старт в науку»  
Секция математики.

**Золотая пропорция или закон красоты в математике.**

Научно – исследовательская работа

Выполнила: Цырулева Марина Сергеевна.

ученица 8 класса

МОУ ООШ с. Крутец

Колышлейского района.

Научный руководитель:

учитель математики

МОУ ООШ с. Крутец

Крупенко Елена Владимировна

2015 год

## Содержание:

<b>Введение</b> .....	3- 4
<b>Глава 1. Пропорции</b>	
1.1. Пропорциональные характеристики	5
1.2. Золотое сечение.	5-6
1.3 Золотые прямоугольники.	7-9
1.4 Золотой треугольник	9-10
1.5 Золотой пятиугольник	10-11
1.6 Золотой кубоид	11
<b>Глава 2. История Золотого сечения.</b>	12-13
<b>Заключение</b>	14
<b>Список литературы</b>	19
<b>Приложения</b>	
<b>Литература</b>	

## 1. Введение.

Разве можно себе представить нашу жизнь без красоты утреннего восхода и вечернего заката солнца, без дорожки лунного серебра на тёмной глади реки Крутец, без дрожащей капли росы на зелёном листке травы, без волшебной - сказочной снежинки на рукавице. То есть без всего того, что заставляет нас снова и снова восклицать: «Боже мой, какая красота»!

Красоту каждый из нас видит по - разному и, возможно, там, где другой и не видит её.

С. И. Ожегов раскрывает содержание слова «красота» так: «Всё красивое, прекрасное, всё то, что доставляет эстетическое и нравственное наслаждение».

Мы взрослеем и наши понятия о красоте становятся всё более сложными. У нас захватывает дух оттого, что мы рассматриваем крылья бабочки на цветке, и скорее осязаем окружающую нас красоту кожей. Мы мечтаем встретить в своей жизни как можно больше людей с внешней красотой и гармонией в душе. О каких - то моментах красоты мы можем поспорить друг с другом, просто в силу того, что люди все разные, и видят всё по - разному. Но есть такая красота, безусловная красота, при виде которой у всех из нас, без исключения, захватывает дух, и наше восхищение выражается просто в молчание. О такой красоте можно говорить, увидев картины Леонардо да Винчи, услышав музыку Моцарта. Ведь соприкоснувшись с бессмертными произведениями искусства, мы соприкасаемся с вечной красотой жизни.

Каждый человек, рассуждая о красоте, в первую очередь имеет в виду поэзию, музыку, живопись, архитектуру. И многие могут поспорить с высказыванием, что красота —это совершенство, заложенное в математике.

Бёртран Рáссел (1872 г —1970 г) — британский философ, общественный деятель и математик , подчеркивая единые законы математики, искусства и природы ,говорил так: Математика, при правильном не нее взгляде, обладает не только истиной, но и высшей красотой , утонченно чистой и способной к строгому совершенству, свойственному лишь величайшему искусству.

Феномен золотого сечения и его связь с красотой окружающего мира известен человечеству очень давно.

В своей работе я хочу связать красоту живой природы и всего того, что нас окружает с геометрическими фигурами, которые получили название «золотые».

А также сделать попытку системного анализа феномена золотого сечения и высказать несколько предположений, позволяющих объяснить всеобщий характер золотой пропорции.

**Гипотеза:** геометрические фигуры золотого сечения являются отображением окружающего мира.

**Объект исследования:** наличие золотых геометрических фигур, золотой пропорции в искусстве, в окружающих предметах.

**Предметы исследования:** предметы искусства, архитектуры, живописи, пропорции учебников, мебели, фигуры учеников.

**Цель работы** – изучение понятия золотой пропорции.

**Задачи:**

1. Сформировать понятие золотая пропорция, найти определение золотого сечения, изучить геометрические фигуры, связанные с золотым сечением.
2. Развивать чувство гармонии, прекрасного.
3. Показать практическое применение понятия Золотое сечение.

## Глава I Пропорция.

### 1.1 Пропорциональные характеристики.

Совсем разная красота у мужчины и женщины, у ребёнка и взрослого. У силача-тяжелоатлета одна красота, выражающая его силу. У ловкого, тонкого гимнаста, у балерины - в лёгкости, грации и так далее. В чём же выражается эта разница, что её определяет? Одно из выразительных средств в искусстве - пропорции.

Мы признаем определенные пропорциональные отношения в построении фигуры человека, его окружения, архитектуры, как нечто должное. Эмоциональное начало художественного творчества проверяется точной наукой. Выдающиеся мастера былых эпох постоянно стремились проверить алгеброй гармонию, впрочем, математика античности, средневековья и Возрождения была лишена сухости и абстрактности.

Слово «пропорция» в переводе с латыни обозначает «соотношение», «соразмерность». Соразмерность частей образует красоту формы. Пропорция — это гармонизация формы художественного произведения, пропорциональность — ее эстетическое качество.

Слайд 4.

В математике дается строгое определение этого термина:

Пропорция (лат. *proportio* — соразмерность, выравненность частей), равенство двух отношений, т. е. равенство вида  $a : b = c : d$ . Наименьшее число в таких отношениях именуют модулем, его избирают в качестве единицы измерения. Среди множества пропорций существует единственное решение, в котором уравниваются не только отношения частей формы, но и всех частей между собой и отношение каждой части к целому. Такая пропорция называется «божественной» или «золотой серединой». (лат. *aurea mediocritas*)

### 1.1 Золотое сечение.

Золотое сечение (золотая пропорция, деление в крайнем и среднем отношении) - соотношение двух величин, равное соотношению их суммы к большей из данных величин. Приблизительная величина золотого сечения равна 1,6180339887. В процентном округлённом значении — это деление величины на 62 % и 38 % соответственно.

Число 1,618 называют числом фи .

Слайд 6

Золотое Сечение, называемое также числом РНІ или  $\Phi$  в честь великого древнегреческого скульптора Фидия (Phidius), который использовал это число в своих скульптурах

Т. О. золотое сечение – это пропорциональное деление отрезка на неравные части. При котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; или другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему

$$a : b = b : c \text{ или } c : b = b : a.$$

Оно применяется в геометрии, математике, естественных науках и искусстве, определяет многие измерения в жизни- в такой, как мы её знаем.

В дошедшей до нас античной литературе золотое сечение впервые встречается в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) . Термин «золотое сечение» был введён гораздо позднее Леонардо да Винчи, который использовал золотое сечение как пропорции «идеального человеческого тела» .В обиход его ввел немецкий математик М. Ом в 1835 году.

Приложение 1 . рис 1

Практическое знакомство с золотым сечением начинают с деления отрезка прямой в золотой пропорции с помощью циркуля и линейки.

Приложение 1 . Рис 2.

Из точки В восстанавливается перпендикуляр, равный половине АВ. Полученная точка С соединяется линией с точкой А. На полученной линии откладывается отрезок ВС, заканчивающийся точкой D. Отрезок AD переносится на прямую АВ. Полученная при этом точка Е делит отрезок АВ в соотношении золотой пропорции.

Отрезки золотой пропорции выражаются бесконечной иррациональной дробью  $AE = 0,618\dots$ , если АВ принять за единицу,  $BE = 0,382\dots$  Для практических целей часто используют приближенные значения 0,62 и 0,38. Если отрезок АВ принять за 100 частей, то большая часть отрезка равна 62, а меньшая – 38 частям.

Описание свойства золотого сечения. Слайд 7.

Обозначим большую часть (АЕ) за 1, целое (АВ) -- за  $x$ . Тогда малая часть  $BE = x - 1$ . Отношение целого к большой части т.е.  $AB/AE$  будет

$x/1 = x$ , то есть, это и есть искомое сечение.

Отношение большой части к малой будет  $AE/BE = 1/(x-1)$ .

По определению эти отношения равны, то есть,

$$x = 1/(x-1),$$

Решаем дробно- рациональное уравнение, учитывая, что  $x > 1$ .

Умножив обе стороны на  $(x-1)$ , справа выражение из знаменателя исчезнет.

$$x*(x-1) = 1$$

раскроем скобки перенесём единицу справа налево.

Т.О. свойства золотого сечения описываются уравнением:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

$$D = 1 - 4*1*(-1) = 5$$

Решение этого уравнения:  $x = (1 + \sqrt{5})/2$  и  $x = (1 - \sqrt{5})/2$ .

Рассматривая расположение листьев на общем стебле многих растений, можно заметить, что между каждыми двумя парами листьев третья расположена в месте золотого сечения.

Здесь я хочу подчеркнуть связь между симметрией и золотым сечением.

Золотая пропорция является симметрией динамического роста. Динамической симметрии свойственно увеличение отрезков или их уменьшение, и оно выражается в величинах золотого сечения возрастающего или убывающего ряда. И это особенно заметно на растениях.

Слайды 9 - 12

Приложение 2. Фото растений. Таблица .

### 1.3 Золотые прямоугольники.

В прямоугольнике, выполненном по правилу золотого сечения, стороны находятся в пропорции 1.618 к 1. ... Отсечём от этого прямоугольник квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника. Оказывается, оставшийся прямоугольник тоже будет

«золотым». Если и от него отсечь квадрат со стороной, равной меньшей стороне уже этого прямоугольника, то и оставшийся прямоугольник будет «золотым». И так далее. Если добавлять квадрат по более длинной стороне прямоугольника, то этот процесс можно продолжать до бесконечности. Оказалось, что длины сторон этих квадратов равны соседним числам в последовательности Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ... И, соответственно, отношение стороны последующего квадрата к стороне предыдущего также равно 1,618.

Слайд 13

В качестве примера рассмотрим пропорциональный строй одной из жемчужин древнерусской архитектуры — храма Василия Блаженного в Москве. За "модуль" принята высота храма. Пропорции храма определяются восемью членами ряда золотого сечения.

Приложение 3. Изображение храма Василия Блаженного

Слайд 14

Но как можно было вычислить «золотые размеры»? Как производили расчеты древние русские мастера. Из-за того, что в золотых пропорциях все числа иррациональные, вычислять их в уме невозможно.

Разгадка в том, что таких вычислений, вообще не производили, а использовали соответствие саженей размерам человека. Если принять народную сажень равной росту зодчего, то каждый мог «геометрически» вычислить остальные сажени. Со временем для удобства приняли единую саженную систему, ориентированную на рост среднего человека — 176см. Не исключено что эталоном была одна из царских реликвий в виде жезла или трости. Т. о. золотая пропорция в строениях России - это мастерство русских зодчих, никогда не знавших шедевров античной культуры.

К золотому прямоугольнику близки формы учебников, но не тетрадей.

Соединив кривой угловые точки этих квадратов в золотом прямоугольнике получим спираль Архимеда.

Слайды 15 - 17

В природе спираль Архимеда встречается на каждом шагу.

Паук плетёт паутину по спирали. Головка подсолнуха состоит из спиралей Архимеда, одни из которых закручены по часовой стрелке, другие - против. Так, в головке среднего размера 34 спирали одного направления и 55

другого. Фактически, мы опять приходим к числам Фибоначчи.

Сосновые шишки и колючки кактусов также имеют спирали, направленные по часовой, или против часовой стрелки. Причём число этих спиралей всегда будут равно соседним числам ряда Фибоначчи. Например, у сосновой шишки спиралей 5 и 8, у ананаса 8 и 13.

Приложение 3 . Картины. Подсолнух, ананас, сосновая шишка, колючка кактуса.

В III веке до нашей эры Архимед на основе своей спирали изобрёл винт, который успешно применяли для передачи воды в оросительные каналы из водоёмов, расположенных ниже. Позже на основе винта Архимеда создали шнек («улитку»). Его очень известная разновидность – винтовой ротор в мясорубке. Шнек используют в механизмах для перемешивания материалов различной консистенции. В технике нашли применение антенны в виде спирали Архимеда. Самоцентрирующийся патрон выполнен по спирали Архимеда. Звуковые дорожки на CD и DVD дисках также имеют форму спирали Архимеда.

Спираль Архимеда нашла практическое применение в математике, технике, архитектуре, машиностроении.

Золотой прямоугольник является основой правила третей, применяемых в фотографии, живописи и кинематографе.

Слайды 18 -22

Правило утверждает, что изображение должно рассматриваться разделенным на девять равновеликих частей с помощью двух равноудаленных параллельных горизонтальных и двух параллельных вертикальных линий. Важные части композиции должны быть расположены вдоль этих линий, или на их пересечении — в так называемых точках силы .

В видоискателях современных цифровых камер точки фокусирования расположены также на позициях, делящих кадр по правилу золотого сечения.

Некоторые камеры оснащены сеткой, построенной по правилу третей. Правило третей было впервые сформулировано в 1797 году и изначально применялось в пейзажных картинах.

Приложение 3 . Правило третей: фото, картины.

#### 1.4 Золотой треугольник.

Золотой треугольник - это равнобедренный треугольник, у которого отношение длины боковой стороны к длине основания равняется 1,618.

Возможны два типа золотых треугольников (рис. 6, а, б). В первом случае  $AB/AC = \text{фи}$ . Во втором случае  $AC/AB = 1/\text{фи}$ .

Приложение рис.7, рис 8. Слайд 23.

Для этого в равнобедренном треугольнике  $ABC$  с углом при вершине  $C$  равным  $36^\circ$ . Проведем отрезок  $AD$  так, что  $\angle CAD = 36^\circ$ . Тогда треугольники  $ACD$  и  $ABD$  равнобедренные, и треугольник  $BDA$  подобен треугольнику  $ABC$  ( $\angle B$  – общий,  $\angle C = \angle DAB = 36^\circ$ ). Примем боковую сторону треугольника  $ABC$  за единицу, а его основание за  $x$ . Тогда

$$AD = CD = x, BD = 1-x.$$

В золотом треугольнике  $ABC$ , аналогично тому, как это делалось для золотого прямоугольника, можно построить последовательность вращающихся золотых треугольников (рис. 8). Соединяя вершины этих треугольников плавной кривой, получим золотую спираль.

В золотой треугольник вписывается изображение Моны Лизы Леонардо да Винчи, памятник Первопоселенцу, Собор Успения Богородицы в г. Пенза, храм Всех святых в г. Сургуте.

Слайд 24. Приложение 4. Золотой треугольник.

Наиболее характерным примером применения правила золотого треугольника может служить любой сетевой продуктовый магазин. Хлеб – это такой товар, за которым мы пойдем специально, иногда можем прийти в магазин с твердым намерением купить только хлеб, но... Мы должны пройти весь зал самообслуживания, наблюдая по дороге другие товары. При этом мы невольно вспоминаем, что дома еще и молока нет, да и сахар почти закончился. Взяв хлеб, мы еще возвращаемся к кассе, зачастую не той дорогой, что мы к хлебу шли. И опять србатывает желание удовлетворить свои потребности – чай тоже почти на исходе, а около чая еще и печенки лежат (куда уж без них). И все приходим на кассу с полной тележкой, корзинкой, в общем-то, нужных, но незапланированных товаров. Т.О, если располагать вход, витрину с хлебом и кассу в вершинах золотого

треугольника, то покупатели в магазине будут оставлять больше денег.

### 1.5 Золотой пятиугольник

В золотом пятиугольнике каждая из пяти линий, составляющих эту фигуру, делит другую в отношении золотого сечения, а концы звезды являются золотыми треугольниками. Для нахождения отрезков золотой пропорции восходящего и нисходящего рядов можно пользоваться пентаграммой.

Слайд 25.

Для построения пентаграммы необходимо построить правильный пятиугольник. Каждый конец пятиугольной звезды представляет собой золотой треугольник. Его стороны образуют угол  $36^\circ$  при вершине, а основание, отложенное на боковую сторону, делит ее в пропорции золотого сечения.

Пятиконечной звезде - около 3000 лет. Ее первые изображения донесли до нас вавилонские глиняные таблички. Из древней Вавилонии в Средиземноморье, как полагают, звездчатый пятиугольник перевез Пифагор и сделал его символом жизни и здоровья, а также тайным опознавательным знаком. Конечно, пифагорейцы не случайно выбрали пентаграмму. Они считали, что этот красивый многоугольник обладает многими мистическими свойствами. Например, число лучей этой звезды представлялось пифагорейцами как число любви:  $5 = 2 + 3$ ; 2 – первое женское число, 3 – первое мужское число. Именно поэтому пентаграмма являлась символом жизни и здоровья, ей присваивалась способность защищать человека от злых духов. Сегодня пятиконечная звезда реет на флагах едва ли не половины стран мира. Чем же объясняется такая популярность? Тем, что совершенная форма этой фигуры радует глаз. Звездчатый пятиугольник буквально соткан из пропорций, и прежде всего золотой пропорции. В г Пенза выстроен мемориал на площади Победы: Солдат и мать с ребенком на руках, который держит позолоченную ветвь, олицетворяющую торжество жизни. Он выполнен в бронзе. Высота - 5,6 м, установлен на постаменте высотой 1,75 м. Пандусы, окружающие памятник, в общем ансамбле имеют форму золотой звезды.

Слайд 26. Приложение 5 . Золотой пятиугольник.

### 1.6 Золотой кубоид

Есть и золотой кубоид- это прямоугольный параллелепипед с ребрами,

имеющими длины  $1.618x$ ,  $1x$  и  $2.618x$ .

Золотой кубоид-это наиболее желательная форма для прямоугольной комнаты прослушивания. Комната прослушивания в форме «золотого кубоида» имеет размеры:  $hx$ ,  $1,62hx$ ,  $2,62h$ , где  $h$ - это высота помещения.

## 2.1. История золотой пропорции.

Понятие о золотом делении ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.). Есть предположение, что Пифагор свое знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют, что египетские мастера пользовались соотношениями золотого деления при их создании. В рельефе из храма фараона Сети I в Абидосе и в рельефе, изображающем фараона Рамзеса, пропорции фигур соответствуют величинам золотого деления. Зодчий Хесира, изображенный на рельефе деревянной доски из гробницы его имени, держит в руках измерительные инструменты, в которых зафиксированы пропорции золотого деления.

Греки были искусными геометрами. Даже арифметике обучали своих детей при помощи геометрических фигур. Квадрат Пифагора и диагональ этого квадрата были основанием для построения динамических прямоугольников.

О золотом делении знали Платон (427...347 гг. до н.э.),

Евклид во 2-й книге «Начал» дает геометрическое построение золотого деления.

В фасаде древнегреческого храма Парфенона присутствуют золотые пропорции. При его раскопках обнаружены циркули, которыми пользовались архитекторы и скульпторы античного мира. В Помпейском циркуле (музей в Неаполе) также заложены пропорции золотого деления.

Рис.9 Динамические прямоугольники.

Рис.10. Античный циркуль золотого сечения.

В средневековой Европе с золотым делением познакомились по арабским переводам «Начал» Евклида. Переводчик Дж. Кампано из Наварры (III в.) сделал к переводу комментарии. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.

В эпоху Возрождения усиливается интерес к золотому делению среди ученых и художников в связи с его применением как в геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре

В 1509 г. в Венеции была издана книга Луки Пачоли «Божественная пропорция» с блестяще выполненными иллюстрациями, ввиду чего полагают, что их сделал Леонардо да Винчи. Книга была восторженным гимном золотой пропорции. Среди многих достоинств золотой пропорции

монах Лука Пачоли не преминул назвать и ее «божественную суть» как выражение божественного триединства бог сын, бог отец и бог дух святой (подразумевалось, что малый отрезок есть олицетворение бога сына, больший отрезок – бога отца, а весь отрезок – бога духа святого).

В то же время немец Альбрехт Дюрер делает наброски введения к первому варианту трактата о пропорциях. Он подробно разрабатывает теорию пропорций человеческого тела. Важное место в своей системе соотношений Дюрер отводил золотому сечению. Рост человека делится в золотых пропорциях линией пояса, а также линией, проведенной через кончики средних пальцев опущенных рук, нижняя часть лица – ртом и т.д. Известен пропорциональный циркуль Дюрера.

Великий астроном XVI в. Иоганн Кеплер назвал золотое сечение одним из сокровищ геометрии. Он первый обращает внимание на значение золотой пропорции для ботаники (рост растений и их строение).

Кеплер называл золотую пропорцию продолжающей саму себя «Устроена она так, – писал он, – что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причем та же пропорция сохраняется до бесконечности».

В 1855 г. немецкий исследователь золотого сечения профессор Цейзинг опубликовал свой труд «Эстетические исследования». Он абсолютизировал пропорцию золотого сечения, объявив ее универсальной для всех явлений природы и искусства. У Цейзинга были многочисленные последователи, но были и противники, которые объявили его учение о пропорциях «математической эстетикой».

Цейзинг проделал колоссальную работу. Он измерил около двух тысяч человеческих тел и пришел к выводу, что золотое сечение выражает средний статистический закон. Деление тела точкой пупа – важнейший показатель золотого сечения. Пропорции мужского тела колеблются в пределах среднего отношения  $13 : 8 = 1,625$  и несколько ближе подходят к золотому сечению, чем пропорции женского тела, в отношении которого среднее значение пропорции выражается в соотношении  $8 : 5 = 1,6$ . У новорожденного пропорция составляет отношение  $1 : 1$ , к 13 годам она равна 1,6, а к 21 году равняется мужской. Пропорции золотого сечения проявляются и в отношении других частей тела – длина плеча, предплечья и кисти, кисти и пальцев и т.д.



## Заключение

В своей работе я рассмотрела пропорцию, научилась делить отрезок в золотом отношении, изучила золотой треугольник, золотой прямоугольник, спираль, золотой кубоид. Исследовала предметы на золотой прямоугольник, пропорцию человеческого тела, увидел пропорцию в окружающей нас природе.

Изложила примеры, взятые из архитектуры, живописи, скульптуры.

В своей работе я хотела продемонстрировать красоту и широту «Золотого сечения» в реальной жизни. Проведенные исследования доказали, что многое в окружающем мире подчиняется правилу золотого сечения.

Человек различает окружающие его предметы по форме. Интерес к форме какого-либо предмета может быть продиктован жизненной необходимостью, а может быть вызван красотой формы. Форма, в основе построения которой лежат сочетание симметрии и золотого сечения, способствует наилучшему зрительному восприятию и появлению ощущения красоты и гармонии. Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

Значение золотого сечения в современной науке очень велико. Эта пропорция используется практически во всех областях знаний.

Есть доказательство того, что человек будет в душевном равновесии там. Где его окружают предметы, размеры которых связаны с золотым сечением.

В моей работе не затронуто золотое сечение в музыке, литературе. Мало исследований об анатомии тела человека. Поэтому мои исследования можно продолжать. И ещё. Нам, потомкам технократической цивилизации, теряющим связь с Природой, невозможно понять суть и смысл тонких процессов, происходящих в ней, а также устройства её самой. Мы привыкли всё делить на составляющие, разбирать, чтобы понять устройство. А нужно наоборот объединять, чтобы понять целое, создать гармонию.

Слайд 28.



